Απαντήσεις Μαθηματικών Κατεύθυνσης Γ Λυκείου

Θέμα Α

Α1. Α) Σχολικό Βιβλίο σελ. 15

Β) i) Σχολικό βιβλίο σελ. 35

ii) Σχολικό βιβλίο σελ. 35-36

Α2. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 142

Α3. Σελ. 135

Α4. Α) Λάθος . διότι το θεώρημα δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων (Σχολικό βιβλίο, σελίδα 71)

Β) Λάθος διότι δεν αναφέρεται ότι η συνάρτηση είναι συνεχής

(Σχολικό βιβλίο, σελίδα 239.)

Α5. γ

Θέμα Β

Β1. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda) = 2 \Rightarrow \lambda = 2$

Β2. $f(x) - x = 0 \Rightarrow e^{-x} + 2 - x = 0$

Θέτω $g(x) = e^{-x} + 2 - x$

Η g είναι συνεχής στο [2,3]

$$g(2) = e^{-2} > 0$$

$$g(3) = e^{-3} - 1 < 0$$

Άρα $g(2) \cdot g(3) < 0$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$

Επίσης $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα επομένως η ρίζα είναι μοναδική .

B3. $f(x) = e^{-x} + 2 \Rightarrow f'(x) = -e^{-x} < 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα επομένως 1-1

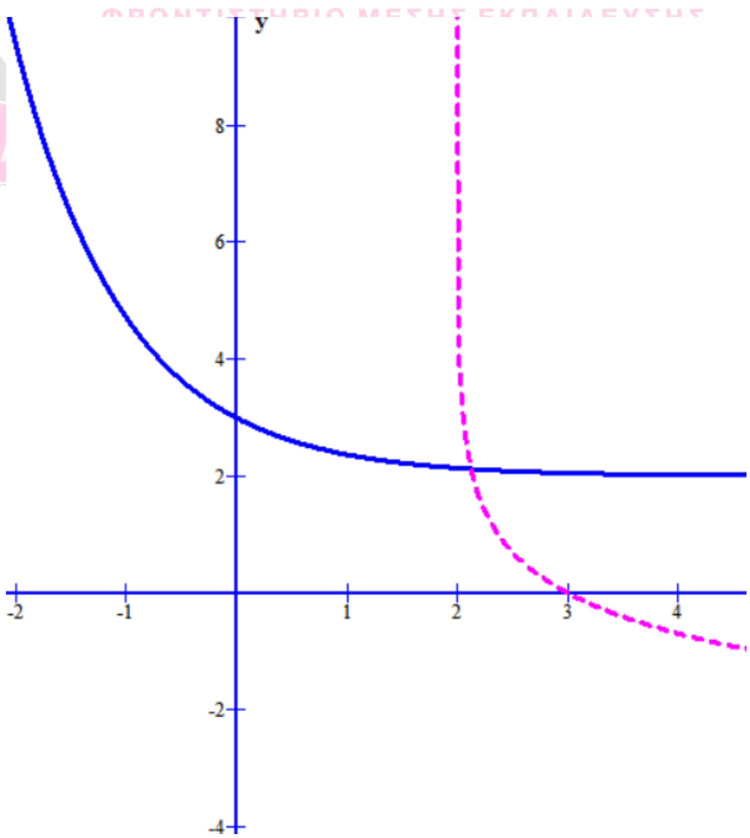
Θέτω $y = f(x) \Rightarrow y = e^{-x} + 2 \Rightarrow y - 2 = e^{-x}$

$-x = \ln(y-2) \Rightarrow x = -\ln(y-2)$, αρκεί $y - 2 > 0 \Rightarrow y > 2$

Επομένως $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $A_{f^{-1}} = (2, +\infty)$

B4. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ άρα η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$



Θέμα Γ

Γ1. Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 θα είναι και συνεχής

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1+\alpha$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1+\beta$$

Άρα $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x^{-71}} - f(x) \Rightarrow 1+\alpha = 1+\beta \Rightarrow \alpha = \beta$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+\alpha-(1+\alpha)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{-x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x}-1+\beta}{-1} = 1+\beta$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Rightarrow 2 = 1+\beta \Rightarrow \beta = 1$$

Άρα $\alpha = 1$

Γ2. Αν x>1 τότε $f'(x) = 2x > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1,+∞)

Αν x<1 τότε $f'(x) = e^{x-1}+1 > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (e^{x-1}+x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x^2+1) = +\infty$$

Άρα $f(\Delta) = (-\infty, +\infty)$

Γ3. i) Η f είναι γνησίως μονότονη άρα αν έχει 1 ρίζα αυτή θα είναι μοναδική

Εφαρμόζουμε Bolzano στο (-1,0)

Η $f(x) = e^{x-1}+x$ είναι συνεχής στο [-1,0] ως άθροισμα συνεχών

$$f(-1) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0$$

$$f(0) = \frac{1}{e} > 0$$

Άρα $f(-1) \cdot f(0) < 0$

Επομένως υπάρχει ένα μοναδικό $x_0 \in (-1,0)$ (αρνητικός) τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$

ii) έστω ότι η εξίσωση έχει μια ρίζα $\rho \in (x_0, +\infty)$ $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Rightarrow$ $f^2(\rho) - x_0 f(\rho) = 0$

$$f(\rho)(f(\rho) - x_0) = 0 \Rightarrow f(\rho) = 0 \text{ ή } f(\rho) = x_0$$

Άρα η μια σχέση δίνει

$f(\rho) = f(x_0) \Rightarrow \rho = x_0$(αφού η f είναι 1-1) άτοπο

$f(\rho) = x_0 < 0 \Rightarrow f(\rho) < 0 \Rightarrow f(\rho) < f(x_0) \Rightarrow \rho < x_0$ αφού η f είναι αύξουσα , άτοπο αφού $\rho > x_0$.

Γ4. Το $M\big(x(t), y(t)\big)$,$Όπου$ $y(t) = x^2(t) + 1$

$$E(t) = \frac{x(t) \cdot y(t)}{2} \Rightarrow E(t) = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}$$

$$E'(t) = \frac{3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{q} \Rightarrow E'(t_0) = 28\, \tau.\mu$$

Θέμα Δ

Δ1. Γνωρίζουμε ότι επειδή η $y = -x + 2$ εφάπτεται στην c_f άρα

$f'(1) = -1$ και $f(1) = 1$

Έχω

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + a$$

Άρα επειδή $f'(1) = -1 \Rightarrow a = -1$

$$f(1) = 1 \Rightarrow a + \beta = 1 \Rightarrow -1 + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 2$$

Δ2. $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

$$f''(x) = \frac{2(x-2)}{x^2 - 2x + 2} + \frac{4(x-1)(x^2 - 2x + 2) - 2(x-1)^2(2x-2)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$
$$= \frac{2(x-1)(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 - 2x + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$ $\qquad$ 1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$		

Σ.κ

Η f είναι κυρτή στο διάστημα [1,2] άρα θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της

Επομένως

$$f(x) \geq -x + 2 \Rightarrow f(x) + x - 2 \geq 0$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$E(\Omega) = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (2x-2)\ln(x^2 - 2x + 2)dx$$

Θέτω $x^2 - 2x + 2 = u \Rightarrow (2x-2)\,dx = du$

Όταν $x = 1$ τότε $u = 1$

Όταν $x = 2$ τότε $u = 2$

Οπότε

$$E(\Omega) = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln u\,du = \frac{1}{2}\int_1^2 u' \ln u\,du = \frac{1}{2}[u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 1\,du$$
$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ \ \tau.\mu$$

Δ3. i) στο Δ2 ερώτημα βρήκαμε το πρόσημο της f΄΄

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ 1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Άρα στο x=1 η f΄ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f^{1}(1) = -1$

Άρα $f'(x) \geq f'(1)\ για\ κάθε\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \geq -1\ για\ κάθε\ x \in \mathbb{R}$

ii) $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

Όμως $f'(\xi) \geq -1 \Rightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Δ4. Η g είναι μια συνάρτηση 2 φορές παραγωγίσιμη

$$g'(x) = -3x^2 - 1$$

$$g''(x) = -6x$$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	$-$
$g'(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Άρα η g΄ παρουσιάζει στο χ=0 ολικό μέγιστο $g'(0) = -1 \Rightarrow g'(x) \leq -1$, η ισότητα ισχύει μόνο για x=0

Και επίσης $f'(x) \geq -1$, η ισότητα ισχύει για x=1

Όμως για να έχουμε κοινή εφαπτομένη πρέπει $f'(\alpha) = g'(\beta)$ $άρα$

$$f'(\alpha) = g'(\beta) = -1 \Rightarrow \beta = 0$$

Άρα η εφαπτομένη θα είναι $y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 2 = -1x \Rightarrow$ $y = -x + 2$(η οποία είναι κοινή).

Επιμέλεια θεμάτων : Τασιάννα Ανδριπούλου